(الأخيرة)

طريقة التخمين لحل العلاقات العودية:

1- نقترح شكل الحل.
2- نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي للتأكد من أن الحل المعطى هو الحل الصحيح.

تمرين:

أوجد حل العلاقة العودية التالية بطريقة التخمين:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

نفرض أن شكل الحل هو

$$T(n) \in O(n \log n)$$

الحل:

نبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي أنه يوجد c بحيث أن:

$$T(n) \leq c\, n \log n$$

نعوض في العلاقة الأساسية

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2\left[c \cdot \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}\right] + n$$

$$= n + c\, n \log \frac{n}{2} \leq c\, n \log n - cn + n$$

وحتى يتحقق $T(n) \leq c\, n \log n$ يجب أن:

$$c\, n \log n - cn + n \leq c\, n \log n$$

$$c \geq 1$$

$$T(n) \leq 1 \cdot n \log n$$

تمرين:

أوجد حل العلاقة العودية التالية بطريقة التخمين:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

نفرض أن شكل الحل $T(n) \in O(n)$

الحل: نبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي أنه يوجد c بحيث أن

$$T(n) \leq cn$$

نعوض في العلاقة الأساسية.

$$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \leq 3c\frac{n}{4} + n$$

$$n[1 + \frac{3c}{4}]$$

حتى يتحقق $T(n) \leq cn$ يجب أن:

$$\cancel{n}[1 + \frac{3c}{4}] < c\cancel{n}$$

$$4 + 3c \leq 4c \Rightarrow c \geq 4$$

$$T(n) \leq 4 \cdot n$$

تمرين:

أوجد حل العلاقة العودية التالية بطريقة التخمين:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{2}) + bn$$

نفرض أن شكل حل هو:

$$T(n) \in O(b \cdot n \log n + dn)$$

حيث d، b ثوابت.

الحل:

نبرهن بطريقة الاستقراء الرياضي أنه يوجد c بحيث أن:

$$T(n) \leq c \cdot b \cdot n \log n + dn$$

نعوض في العلاقة الاساسية :

$$T(n) \leq c.b.\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + d\frac{n}{2} + cb\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} +$$

$$+ d\frac{n}{2} + b.n = c.b.n\log\frac{n}{2} + dn + bn \leq$$

$$\leq cb.n\log\left(\frac{n+1}{2}\right) + dn + b.n = cbn\log(n+1) -$$

$$- cbn + dn + bn$$

حتى يتحقق $T(n) \leq cbn\log n + dn$ يجب ان :

$$cbn\log(n+1) - cb.n + \cancel{dn} + b.n \leq cbn\log n + \cancel{dn}$$

$$\cancel{b}n \leq c\cancel{b}n\log n - c\cancel{b}n\log(n+1) + c\cancel{b}n$$

$$c \geq \frac{1}{\log n - \log(n+1)} = \frac{1}{\log\frac{n}{n+1} + 1} = 2,41$$

$$T(n) \leq 2,41\ bn\log(n) + dn$$

تعقيد الخوارزمية :

هو عبارة عن تابع (دالة) $f(n)$ يعطي حداً أعلى للعدد العمليات أو زمن التنفيذ التي تقوم به الخوارزمية.

ليكن f, g تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة.

$$f, g : N \longrightarrow R^+$$

$f(n) \in O(g(n))$ اذا وجد عدداً حقيقياً موجباً $c > 0$!

وعدداً صحيحاً موجباً $n \geq n_0 \geq 0$

$$f(n) \leq c(g(n))$$

$$f(n) \in O(g(n))$$

$$f(n) = O(g(n))$$

تعريف Ω :

ليكن g و f تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

$$f, g : N \longrightarrow R^+$$

إذا وجد عدداً صحيحاً موجباً $c > 0$

وعدداً صحيحاً موجباً $n \geq n_0 \geq 0$

$$f(n) \geq c(g(n))$$

$$f_n \in \Omega(g(n))$$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

تعريف Θ

ليكن لدينا f, g تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة

$$f, g : N \longrightarrow R^+$$

عندئذ نقول أن $f(n) \in \Theta(g(n))$ إذا وجد عدد حقيقي موجب $c_1 \geq 0$ ، $c_2 \geq 0$ وعدد صحيح موجب $n \geq n_0 \geq 0$

$$c_1(g(n)) \leq f(n) \leq c_2(g(n))$$

عندئذ نقول أن $f(n) \in O(g(n))$

مثال :

أثبت أن :

$$f(n) = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 + 6} = \Theta(1)$$

(أي نثبت أن $g(n) = 1$)

الحل :

$$n^2+3n+5 = n^2+6+3n-1$$

نعوض :

$$f(n) = 1 + \frac{3n-1}{n^2+6} \leq 2.1$$

$; n \geq 1$

$$\Rightarrow c_2 = 2 \; , \; g(n) = 1$$

$$f(n) \in O(1)$$

من أجل $n \geq 1$.

$$1.1 \leq 1 + \frac{3n-1}{n^2+6}$$

$$c_1 = 1 \; , \; g(n) = 1$$

$$f(n) \in \Omega(1)$$

عندئذ :

$$1.g(n) \leq f(n) \leq 2.g(n)$$

ومنه

$$f(n) \in \Theta(1)$$

ملاحظة :

إذا كان لدينا f و g تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة عندئذٍ نقول أن $f(n) \in \Theta(g(n))$ إذا كانت

$$f(n) = O(g(n))$$
$$f(n) = \Omega(g(n))$$

تمرين :

أثبت أنه :

$$f(n) = \frac{n^2}{2} - 3n \in \Theta(n^2)$$

$; g(n) = n^2$

الحل :

حسب تعريف Θ يجب أن يوجد c_1 و c_2 بحيث أن

$$c_1 n^2 \leq \frac{n^2}{2} - 3n \leq c_2 n^2$$

نقسم المتراجحة على n^2

$$c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$$

$n \geq 1$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le \frac{1}{2}$$

$, c_2 = \frac{1}{2}$

$n \geq 7$

$$\frac{1}{14} < \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$$

$\frac{7-6}{14}$

$; c_1 = \frac{1}{14}$

$$\frac{1}{14} \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le \frac{1}{2}$$

تمرين:

أوجد تعقيد الخوارزمية التالية تحسب الحلقة التالية:

```
s=0;
for (i=0 ; i<n ; ++i)
    s=s+i ;
```

مجموع الأعداد الصحيحة من ٠ ← n

مثلاً n=3 فإن عدد الإسنادات = 8

$s=0$; (1)
$i=0$ (2) $\Rightarrow s=s+i$ (3)
$++i = i=i+1$; (4) $s=s+i$; (5)
$++i$, (6) $s=s+i$ (7)
$++i$; (8)

$$8 = 3 \times 2 + 2$$
$$= n \times 2 + 2$$

مثلاً n فإن عمليات الاسناد هي $n = 2n+2$

- ان عدد عمليات الاسناد هو $2+2n$

$c = 4$

$2 + 2n \le c \cdot n$; $n = 2$

$$g(n) = n$$

$$2 + 2n \in O(n)$$

تمرين :

اثبت أن :

$$\frac{g_2(n)}{g_1(n) \cdot g_3(n)} \in O(1)$$

حيث أن

$$\sum_{i=1}^{n} i \in O(g_1(n))$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \in O(g_2(n)) \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 \in O(g_3(n))$$

ملاحظة : يجب أن نعرف $g_1(n)$, $g_2(n)$, $g_3(n)$ ثم التعويض في العلاقة السابقة لحساب قيمة $g(n)$

لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n) \leq c(n^2)$$

أعلى أس

متراجحة محققة و $c=4$, $n_0 = 2$

من أجل :

$$3 \leq 16$$

$$g_1(n) = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) \leq c(n^3)$$

من أجل $n_0 = 2$ و $c = 4$ العلاقة محققة .

ومنه :

$$g_2(n) = n^3$$

$$(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ومنه

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}\left[n^4 + 2n^3 + n^2\right] \leq c(n^4)$$

من أجل $n=2$ و $c=4$ فالعلاقة محققة،

$$9 \leq 64$$

ومنه $g_3(n) = n^4$

نعوض في العلاقة فنحصل على:

$$\frac{n^3}{n^2 \cdot n^4} = \frac{1}{n^3} \leq 1.1$$

ومنه $c=1$ و $g(n)=1$

وبالتالي العلاقة صحيحة،

حساب تعقيد الخوارزمية من خلال حساب النهايات

ليكن لدينا f و g تابعين معرفين على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أي ~~[illegible]~~

$$f, g : N \longrightarrow R^+$$

عندئذ يمكن تعريف الرموز o ، O ، Ω ، Θ بالشكل التالي:

~~[illegible]~~

- يجب أن نوجد c بحيث $f(n) < c\,g(n)$

~~[illegible]~~

الرمز: o

إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \phi$$

عندئذ $g(n) = o(f(n))$

مثال:

إذا كان $g(n) = n^2$ و $f(n) = n^3$

عندئذ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{6n}$$

$$= 0 \Rightarrow n^2 \in o(n^3)$$

- الرمز O :

إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = const$$

عندئذ

$$g(n) = O(f(n))$$

- الرمز Ω :

إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = const$$

عندئذ

$$f(n) \in \Omega(g(n))$$

مثال :

إذا كان

$$g(n) = 3n^3 \quad , \quad f(n) = n^3 + 4$$

عندئذ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4}{3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{9n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{18n}$$

$$= \frac{1}{3} \Rightarrow n^3 + 4 \in \Omega(3n^3)$$

الرمز Θ :

إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = const > 0$$

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

وظيفة

اوجد حل العلاقة العودية عندما

$$T(n) \geq cbn\log n + dn$$

انتهت المحاضرة